ZŁO* — ćwiczenia 13

Różności

Zadania

Rozważmy problem *k-ścieżki*: mając dany graf G i liczbę k, stwierdzić, czy w G istnieje ścieżka prosta na k wierzchołkach. *Wielomianowym jądrem* dla tego problemu nazwalibyśmy algorytm, który mając daną instancję (G, k) oblicza w czasie wielomianowym równoważną instancję (G', k') taką, że $|G'| + k' \leqslant p(k)$ dla pewnego ustalonego wielomianu p.

Zadanie 1. Wykaż, że jeśli problem k-ścieżki ma wielomianowe jądro, to $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{coNP}$/poly.

Wskazówka: Użyj założenia o istnieniu jądra oraz własności problemu k-ścieżki do konstrukcji OR-destylacji dla tego problemu. Następnie skorzystaj z twierdzenia Fortnowa-Santhanama z poprzednich ćwiczeń.

Klasa dIP obejmuje języki L, dla których istnieje protokół mający następujące własności. Protokół jest rozgrywany pomiędzy dwoma graczami: Arturem i Merlinem. Artur dysponuje deterministyczną maszyną wielomianową, ma dane słowo x, i chciałby wiedzieć, czy $x \in L$. Merlin dysponuje nieograniczoną mocą obliczeniową. Artur i Merlin naprzemiennie wysyłają do siebie komunikaty, które są co najwyżej wielomianowej wielkości oraz liczba rund jest wielomianowa. Protokół jest poprawny, jeśli

- Jeśli $x \in L$, to Merlin może tak odpowiadać na komunikaty Artura, że Artur na koniec stwierdzi, że $x \in L$.
- Jeśli $x \notin L$, to niezależnie od komunikatów od Merlina, Artur zawsze na koniec stwierdzi, że $x \notin L$.

Zadanie 2. Wykaż, że $\mathsf{dIP} = \mathsf{NP}$.

Zadanie 3. Ustalmy jakiekolwiek sensowne kodowanie problemu SAT przy pomocy ciągu bitów, np. po kolei podajemy klauzule kodując binarne indeksy zmiennych w literałach. W problemie Succint SAT dany jest obwód C o n wejściach i jednym wyjściu. Przez $\varphi(C)$ oznaczamy formułę logiczną uzyskaną następująco: do C wstawiamy po kolei wszystkie ciągi bitowe długości n, w kolejności leksykograficznej, wyniki C na tych ciągach ustawiamy w słowo, i interpretujemy to słowo jako zapis bitowy formuły $\varphi(C)$. W ten sposób, $\varphi(C)$ jest zapisywana na 2^n bitach. Dla danego obwodu C, pytamy się, czy $\varphi(C)$ jest spełnialna. Udowodnij, że problem Succint SAT jest zupełny dla klasy $\mathsf{NEXPTIME}$ pod P-redukcjami. Kodowanie bitowe dla problemu SAT możesz sobie dobrać dowolnie.

Język L nazwiemy P-*selektywnym* jeśli istnieje wielomianowo obliczalna funkcja $f(x, y)$, gdzie $x, y \in \Sigma^\star$, taka, że jeśli $f(x, y) \in \{x, y\}$ dla każdych x, y, oraz jeśli $|\{x, y\} \cap L| = 1$, to $f(x, y)$ jest równe jedynemu elementowi w $\{x, y\} \cap L$. Klasę języków P-selektywnych nazwiemy Psel.

Zadanie 4. Wykaż, że $\mathsf{Psel} \subseteq \mathsf{P}$/poly.

Zadanie 5. Wykaż, że jeśli istnieje język P-selektywny, który jest zarazem NP-zupełny, to $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$.

Język L nazwiemy *unarnym* (ang. *tally*) jeśli $L \subseteq \{1\}^\star$. Język L nazwiemy *rzadkim* jeśli dla każdego n zachodzi $|L \cap \Sigma^{\leqslant n}| \leqslant p(n)$, dla pewnego ustalonego wielomianu p.

Zadanie 6. Udowodnij, że każdy język rzadki jest w P/poly.

Zadanie 7. Udowodnij, że jeśli istnieje NP-zupełny język unarny, to $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$.

Zadanie 8. Udowodnij, że jeśli istnieje NP-zupełny język rzadki, to $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$.