ZŁO* — ćwiczenia 1

Maszyny Turinga

Ćwiczenia oznaczone przez ♠ będziemy robić w miarę możliwości czasowych. Jeśli nie starczy czasu, to zostaną do przemyślenia w domu i następne ćwiczenia zaczniemy od wybranych z nich.

Przypomnienie maszyn Turinga

Jednotaśmowa, deterministyczna maszyna Turinga M ma następujące komponenty:

- alfabet wejściowy Σ,
- alfabet roboczy $\Gamma \supseteq \Sigma$ zawierający $\perp, \triangleright \notin \Sigma$,
- zbiór stanów Q, oraz
- funkcja przejścia δ.

Maszyna dostaje na wejściu słowo x nad alfabetem wejściowym Σ, zapisane po lewej prawostronnie nieskończonej taśmy. Po lewej od słowa wejściowego x znajduje się niezmienialny znacznik $\triangleright$, reszta taśmy jest wypełniona blankami $\perp$. Głowica jest na początku na $\triangleright$, stan początkowy to jakiś ustalony q_0. Maszyna porusza się zgodnie z funkcją przejścia δ: w zależności od stanu i litery pod głowicą, maszyna zapisuje coś w komórce lub nie, porusza się o jeden krok w lewo, w prawo, lub zostaje w miejscu, oraz zmienia stan. Zakładamy, że znacznika $\triangleright$ nie da się nadpisać i nie można pójść na lewo od niego (zabronione w funkcji przejścia maszyny. Oprócz tego maszyna może wywołać instrukcję Accept lub Reject, przy której obliczenie się kończy i słowo wejściowe jest akceptowane lub odrzucane.

Maszyna wielotaśmowa, jak sama nazwa wskazuje, ma wiele taśm (ustaloną z góry liczbę). Słowo wejściowe jest napisane na pierwszej taśmie, reszta jest wypełniona blankami. Na każdej taśmie jest głowica, przejścia zależą od stanu maszyny i krotki symboli pod głowicami, zaś instrukcje składają się z krotki instrukcji dla każdej taśmy (lewo/prawo/stój, oraz zapis).

Język $L \subseteq \Sigma^\star$ jest *częściowo obliczalny* jeśli istnieje maszyna, która akceptuje każde słowo z L, a na każdym słowie spoza L albo się pętli, albo je odrzuca. Język L jest *obliczalny* jeśli istnieje maszyna, która się zatrzymuje na każdym słowie wejściowym (ma własność stopu) i akceptuje słowa z L oraz odrzuca słowa spoza L. Język L jest w $\mathsf{DTIME}[T(n)]$ jeśli istnieje maszyna wielotaśmowa rozpoznająca czy dane słowo długości n jest w L w $\mathcal{O}(T(n))$ krokach.

Zadania

Zadanie 1. Skonstruuj jednotaśmową maszynę rozpoznającą język palindromów w $\mathcal{O}(n^2)$ krokach.

Zadanie 2. Skonstruuj dwutaśmową maszynę rozpoznającą język palindromów w $\mathcal{O}(n)$ krokach.

Zadanie 3. Pokaż, że następujące modele zarówno dają się symulować przez jednotaśmową maszynę Turinga, oraz potrafią symulować jednotaśmową maszynę Turinga. W każdym przypadku oszacuj wybuch liczby kroków potrzebny do symulacji.

(1) Maszyna jednotaśmowa, z obustronnie nieskończoną taśmą.

(2) Maszyna wielotaśmowa, dla każdej ustalonej liczby taśm.

(3) Maszyna jednotaśmowa, która ma tylko dwa stany.

(4) Maszyna dwutaśmowa, która może pisać tylko po blankach.

(5) Maszyna dwutaśmowa, w której pierwsza taśma z wejściem jest read-only, a druga, robocza, ma binarny alfabet roboczy.

Zadanie 4. Wykaż, że jeśli język L jest rozpoznawany przez maszynę jednotaśmowa, która może pisać tylko po blankach, to L jest regularny.

Zadanie 5 (♠). Wykaż, że jeśli jednotaśmowa maszyna M rozpoznaje język palindromów binarnych, to maksymalna liczba kroków użyta przez M na wejściach długości n jest w $\Omega(n^2)$.

Zadanie 6 (♠). Udowodnij, że jeśli język L jest rozpoznawany przez jednotaśmową maszynę M działającą zawsze w $\mathcal{O}(n)$ krokach na wejściach długości n, to L jest regularny.

Zadanie 7. Wykaż, że jeśli zarówno język L jak i jego dopełnienie $\overline{L} := \Sigma^\star - L$ są częściowo obliczalne, to L jest obliczalny.

Zadanie 8 (♠). Udowodnij, że jeśli istnieje wielotaśmowa maszyna rozpoznająca język L w co najwyżej $T(n)$ krokach, to również istnieje wielotaśmowa maszyna rozpoznająca L w co najwyżej $T(n)/2 + \mathcal{O}(n)$ krokach.