

Ćwiczenia nr 3
Kognitywistyka: Wstęp do matematyki
Funkcje, permutacje, symbol Newtona, 22.10.2018

Zadanie 1. Ile jest funkcji *różnowartościowych* $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 2, 4\}$?

Zadanie 2. Ile jest funkcji *na* $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 2\}$?

Zadanie 3. Napisać wzór na funkcję *odwrotną* do funkcji f lub uzasadnić, że funkcja f nie ma funkcji odwrotnej, jeśli

- (a) $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{2, 4, 6\}$, $f(0) = 6$, $f(1) = 4$, $f(2) = 2$;
- (b) $f(n) =$ reszta z dzielenia $2n$ przez 3, $n = 3, 7, 11$;
- (c) $f(n) =$ reszta z dzielenia 2^n przez 13, $n = 0, 1, 2, \dots, 11$;
- (d) $y = 3x - 1, x \in \mathbb{R}$;
- (e) $f : x \mapsto x^2, x \in [-1, 0)$.

Zadanie 4. Dla przekształcenia $f : \{0, 1, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ zadanego przez

- (a) $f(0) = 4, f(1) = 3, f(3) = f(4) = 2$,
- (b) $f(0) = 4, f(1) = 1, f(3) = 2, f(4) = 3$,
- (c) $f(0) = 1 = f(4), f(1) = f(3) = 3$,

znajdź $f(\{0, 3\}), f(\{1, 3, 4\}), f^{-1}(1), f^{-1}(\{1, 2\}), f^{-1}(\{2, 4\})$.

Zadanie 5. Przekształcenie $f : \{1, 2, 3, 5\}, g : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{3, 7, 37, 137\}, h : \{3, 7, 37, 137\} \rightarrow \{1, 2, 3, 5\}$ zadanym przez

- (a) $f(1) = 4, f(2) = 3, f(3) = 0, f(5) = 2$,
- (b) $g(0) = 3, g(1) = 137, g(2) = 7$,
- (c) $h(3) = 1, h(7) = h(37) = 3, h(137) = 2$

znajdź $g \circ f, f \circ g, h \circ g \circ f, f \circ h \circ g \circ f$.

Zadanie 6. Test egzaminacyjny składa się z 12 zadań. Przy każdym z nich należy napisać T , jeśli zdanie jest prawdziwe, lub N , jeśli zdanie jest fałszywe. Na ile sposobów może ten test wypełnić student, który zdecydował się zakreślać odpowiedzi losowo?

Zadanie 7. Grupa składa się z 15 małżeństw. Na ile sposobów można spośród nich wybrać czteroosobową delegację, jeśli w skład delegacji nie może wchodzić żadne małżeństwo?

Zadanie 8. Na ile sposobów można podzielić 7 osób na dwie grupy co najmniej dwu-osobowe?

Zadanie 9. Ile jest ciągów

- (a) zero-jedynkowych złożonych z m zer i n jedynek?
- (b) ciągów złożonych z k zer, l jedynek i m dwójek.

Zadanie 10. Na ile różnych sposobów można posadzić Adama, Basię, Czarka i Daszę przy okrągłym stole? A jeśli chcemy by Adam i Czarek nie siedzieli obok siebie? Uwaga, dwa sposoby usadzenia uważamy za takie same, jeśli w obu sposobach każda z osób ma tych samych sąsiadów zarówno po lewej, jak i prawej stronie.

Zadanie 11. Na ile różnych sposobów można posadzić n osób przy okrągłym stole?

Zadanie 12. Ile jest liczb 99-cyfrowych, w których cyfra 9 występuje 11 razy, a 0 nie występuje ani razu.

Zadanie 13. Na ile sposobów można ustawić k wież na szachownicy 8×8 , by żadne dwie nie były się.

Zadanie 14. Wykazać, że

- (a) $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 2^n$,
- (b) $\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} = 0$.

Zadanie 15. Obliczyć $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \frac{1}{4}\binom{n}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$.

Zadanie 16. Wykazać, że $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2$.