

Ćwiczenia nr 2
Kognitywistyka: Wstęp do matematyki
Elementy logiki i teorii zbiorów, 15.10.2018

Zadanie 1. Sprawdź, które z poniższych zdań są tautologiami:

- (a) $((p \wedge q) \vee (\neg p)) \implies q$,
- (b) $(p \wedge q) \vee (q \implies p)$,
- (c) $((p \vee q) \wedge r) \iff ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$,
- (d) $(p \implies (q \implies r)) \iff ((p \implies q) \implies r)$,
- (e) $(p \implies (q \implies r)) \iff (q \implies (p \implies r))$.

Zadanie 2. Zdefiniuj alternatywę, implikację i równoważność tylko za pomocą koniunkcji i negacji.

Zadanie 3. Na wyspie mieszkają tylko rycerze i łotrzy. Rycerze zawsze mówią prawdę, a łotrzy zawsze kłamią. Przybysz napotkał trzech mieszkańców wyspy i dwóch z nich zapytał, ilu rycerzy mu towarzyszy. Pierwszy odpowiedział, że ani jeden, a drugi, że tylko jeden. Który z napotkanych mieszkańców jest rycerzem, a który łotrem?

Zadanie 4. O zbiorach A, B, X wiadomo, że $A \subset X$ i $B \subset X$. Które z poniższych zdań jest prawdziwe. Odpowiedź proszę dokładnie uzasadnić.

- (a) $(A \cup B) \setminus B = A$,
- (b) $A \cup B \cup A = B \cup A \cup B$,
- (c) Jeśli $A \subset B$, to $A \cup B = B$,
- (d) $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)' = A_1' \cap A_2' \cap \dots \cap A_n'$, gdzie dla przez Z' rozumiemy dopełnienie zbioru Z w X , tj. $X \setminus Z$.

Zadanie 5. Różnicą symetryczną zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony z elementów, które należą do dokładnie jednego ze zbiorów A, B . Różnicę symetryczną zbiorów A i B oznaczajmy przez $A \div B$. Udowodnić, że

- (a) $A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- (b) $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$,

Zadanie 6. Niech A, B, C będą zbiorami skończonymi. Uzasadnić, że

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - (\#A \cap B + \#B \cap C + \#C \cap A) + \#(A \cap B \cap C).$$

Zadanie 7. Znaleźć wzór na liczbę elementów zbioru $A \div B \div C$.

Zadanie 8. Czy

- (a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
- (b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
- (c) $(A \times B) \div (C \times D) = (A \div C) \times (B \div D)$.

Zadanie 9. Wypisać wszystkie dwu- i trzy-elementowe podzbiory zbioru $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Których podzbiorów jest więcej?