Ćwiczenia nr 1
Kognitywistyka: Wstęp do matematyki
Dowody indukcyjne, 2.10.2017

Zadanie 1. Proszę uzasadnić, że

(a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$,
(b) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$.
(c) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$,
(d) $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, dla $a \neq 1$,
(e) $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$,
(f) $2^n \geqslant n^2$ dla $n \neq 3$,
(g) $3^n \geqslant n^3$ dla $n \geqslant 4$.

Zadanie 2. Ciąg liczb F_1, $F_2, \ldots$ tworzymy według następującego przepisu:

$$F_1 := 1, F_2 := 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

dla $n = 3, 4, \ldots$. Proszę uzasadnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi związek

$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}.$$

Zadanie 3. Proszę uzasadnić, że

(a) Dowolna liczba postaci $10^n - 4$ dzieli się przez 6.
(b) 14 dzieli dowolną liczbę postaci $8^n + 6$.
(c) 169 dzieli liczbę $3^{3n+3} - 26n - 27$ dla liczb naturalnych n.
(d) Czy prawdą jest, że dla dowolnych liczb naturalnych a, b, n liczba $a^n + b$ dzieli się przez $a + b$?
(e) 19 dzieli liczbę $2^{2^{6k+2}} + 3$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots$.
(f) $1000^n + (-1)^{n+1}$ dzieli się przez 13

Twierdzenie. Dla dowolnych nieujemnych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Zadanie 4. Proszę udowodnić to twierdzenie w następujących krokach. Niech T_n $(n \geqslant 2)$ oznacza powyższą nierówność.

(a) Sprawdzić, że zdanie T_2 jest prawdziwe.
(b) Wykazać, że jeśli zdanie T_n jest prawdziwe, to zdanie T_{2n} też.
(c) Wykazać, że jeśli zdanie T_n jest prawdziwe, to zdanie T_{n-1} też.
(d) Uzasadnić, że zdania T_7 i T_{77} są prawdziwe.
(e) Dokończyć dowód powyższego twierdzenia.

Zadanie 5. Definiujemy ciąg liczb $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ oraz $a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3}$ dla $n \geqslant 3$.

(a) Oblicz a_n dla $n = 3, 4, 5, 6, 7$.
(b) Udowodnij, że $a_n > 2^n$ dla $n \geqslant 1$.
(c) Udowodnij, że $a_n < 2^{n+1}$ dla $n \geqslant 1$.
(d) Udowodnij, że $a_n = 2a_{n-1} + (-1)^{n-1}$ dla $n \geqslant 1$.

Zadanie 6. Z szachownicy o wymiarach 2^n na 2^n usunięto jedno pole, ale nie wiadomo które. Udowodnić, że tak powstałą część szachownicy można pokryć figurami