Rachunek prawdopodobieństwa II

semestr zimowy 2023/2024

zadania domowe, seria 5. (dodatkowa)

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach w czwartek **25 I 2024** (lub wysłać mailem przed rozpoczęciem ćwiczeń).

Zadanie 1. Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, gdzie $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. Przyjmujemy $S_0 = 0$.

(a) Czy $Y_n = \max_{k \leqslant n} S_k$ jest łańcuchem Markowa?

(b) Czy $Z_n = \max_{k \leqslant n} S_k - S_n$ jest łańcuchem Markowa?

Zadanie 2. Rozpatrzmy łańcuch Markowa o macierzy przejścia

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix},$$

gdzie $\alpha, \beta \in [0,1]$.

(a) Sklasyfikować stany łańcucha w zależności od α i β oraz stwierdzić, czy łańcuch jest nieprzywiedlny oraz nieokresowy.

(b) Załóżmy, że $\alpha, \beta \in (0,1)$. Wyznaczyć jawny wzór na prawdopodobieństwa przejścia $p_{ij}(n)$, $i, j = 1, 2$, i wykazać (bezpośrednim rachunkiem, bez użycia twierdzenia o łańcuchach ergodycznych), że $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j$, gdzie $\pi = (\pi_1 \, \pi_2)$ jest rozkładem stacjonarnym łańcucha.

Zadanie 3. Dane są $\alpha > 0$ i jednorodny łańcuch Markowa na przestrzeni stanów $\{1, 2, \ldots\}$, startujący z 1, o prawdopodobieństwach przejścia $p_{k,1} = \frac{1}{(k+1)^\alpha}$, $p_{k,k+1} = 1 - \frac{1}{(k+1)^\alpha}$, $k = 1, 2, \ldots$

(a) Czy łańcuch ten jest nieprzywiedlny i nieokresowy?

(b) Wyznaczyć w zależności od α wszystkie stany powracające tego łańcucha.

(c) Dla jakich α istnieje rozkład stacjonarny? Kiedy jest on wyznaczony jednoznacznie?