Rachunek prawdopodobieństwa II

semestr zimowy 2023/2024

zadania domowe, seria 4.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać pisemnie i oddać na ćwiczeniach w czwartek **11 I 2024** (lub wysłać mailem przed rozpoczęciem ćwiczeń).

Zadanie 1. Załóżmy, że zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, symetryczne oraz $\mathrm{Var}\, X_i = 2$. Określamy $M_0 = 1$ oraz $M_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{X_k}{k}\right)$ dla $n \geqslant 1$. Wykazać, że M_n jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Rozstrzygnąć, czy M_n jest zbieżny w L^2 oraz prawie na pewno.

Zadanie 2. Załóżmy, że M_n jest martyngałem takim, że $M_0 = 0$ oraz $\mathbb{E}M_n^2 < \infty$ dla każdego $n \geqslant 1$. Wykazać dla $\lambda \geqslant 0$ nierówność

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} M_k \geqslant \lambda\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}M_n^2}{\mathbb{E}M_n^2 + \lambda^2}.$$

Wskazówka: rozpatrzyć podmartyngał postaci $(M_n + c)^2$ dla odpowiednio dobranego c.

Zadanie 3. Podać przykład martyngału M_n takiego, że $M_n \to -\infty$ prawie na pewno.