

Rachunek prawdopodobieństwa II
semestr zimowy 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 7 XII 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Niech X_1, X_2, \dots będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ i niech $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

- (a) Wykazać, że dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ ciąg $M_n = \exp\left(\lambda S_n - \frac{\lambda^2}{2}n\right)$ jest nadmartyngałem względem filtracji generowanej przez $(X_n)_{n \geq 1}$.
- (b) Znaleźć wszystkie $a \in \mathbb{R}$ takie, że ciąg $M_n = a^n \cos S_n$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez $(X_n)_{n \geq 1}$.

Zadanie 2. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych X_1, X_2, \dots o średniej 1. Wykazać, że $M_n = X_1 \cdot \dots \cdot X_n$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez $(X_n)_{n \geq 1}$.

Zadanie 3. Gracze A i B dysponują kapitałami początkowymi odpowiednio a i b , gdzie $a, b \in \mathbb{N}$. W każdej rundzie stawka wynosi 1 i gra trwa aż do ruiny jednego z graczy. Prawdopodobieństw wygranej gracza A (odp. B) w pojedynczej rundzie wynosi p (odp. $q = 1 - p$). Zakładamy, że wyniki gry w poszczególnych rundach są niezależne.

- (a) Obliczyć prawdopodobieństwo ruiny gracza A dla $p = \frac{1}{2}$ oraz $p \neq \frac{1}{2}$.
- (b) Obliczyć średni czas trwania gry dla $p = \frac{1}{2}$ oraz $p \neq \frac{1}{2}$.
- (c) Załóżmy, że gracz B dysponuje nieskończonym kapitałem (" $b = \infty$ "). Obliczyć prawdopodobieństwo ruiny gracza A dla $p = \frac{1}{2}$ oraz $p \neq \frac{1}{2}$.
- (d) Załóżmy, że gracz B dysponuje nieskończonym kapitałem oraz gra jest niekorzystna dla gracza A ($p < \frac{1}{2}$). Obliczyć średni czas oczekiwania na ruinę gracza A .

Zadanie 4. Załóżmy, że X_1, X_2, \dots są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, przy czym $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$, a τ jest momentem zatrzymania takim, że $\mathbb{E}\tau < \infty$. Wykazać, że

$$\mathbb{E}(S_\tau - \tau \mathbb{E}X_1)^2 = \mathbb{E}\tau \cdot \text{Var } X_1.$$