

Rachunek prawdopodobieństwa II
semestr zimowy 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 12 X 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli $X_n \xrightarrow{p.n.} X$ lub $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, to $X_n \Rightarrow X$. Podać przykład, że w ogólności żadnej z tych implikacji nie można odwrócić.

Zadanie 2. Wykazać, że jeżeli $X_n \Rightarrow c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ jest stałą, to $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$.

Zadanie 3. Załóżmy, że zmienne losowe X_n, X o wartościach rzeczywistych mają gęstości odpowiednio g_n, g oraz $g_n \rightarrow g$ prawie wszędzie. Wykazać, że

$$\sup_A |\mu_n(A) - \mu(A)| \leq \int_{\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| dx \rightarrow 0,$$

gdzie $X_n \sim \mu_n$, $X \sim \mu$. Wywnioskować, że wówczas $X_n \Rightarrow X$ i podać przykład, że słaba zbieżność w ogólności nie implikuje zbieżności do zera supremum po lewej stronie.

Zadanie 4. Załóżmy, że $X_n \Rightarrow X$ oraz $Y_n \Rightarrow Y$. Podać przykład, że w ogólności nie wynika stąd, że $X_n + Y_n \Rightarrow X + Y$.

Zadanie 5. Załóżmy, że $X_n \Rightarrow X$ oraz $Y_n \Rightarrow c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ jest stałą. Wykazać, że wówczas $X_n + Y_n \Rightarrow X + c$ oraz $X_n Y_n \Rightarrow cX$.