Rachunek prawdopodobieństwa II

semestr zimowy 2023/2024

zadania na ćwiczenia, 25 I 2024

Michał Kotowski

Zadanie 1. Rozpatrzmy łańcuch Markowa $(X_n)_{n\geqslant 0}$ na przestrzeni stanów $E = \{1,2,3,4\}$ o następującej macierzy przejścia:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Obliczyć prawdopodobieństwo dojścia w dwóch krokach ze stanu 1 do 2.

(b) Załóżmy, że $X_0 = 1$. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że X_n dojdzie do stanu 2 zanim dojdzie do stanu 4.

(c) Załóżmy, że $X_0 = 3$. Obliczyć wartość oczekiwaną czasu dojścia do stanu 2.

(d) Wyznaczyć rozkład stacjonarny łańcucha.

Zadanie 2. Rzucamy kostką aż do momentu, dopóki nie wyrzucimy trzech piątek pod rząd.

(a) Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów.

(b) Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby wyrzuconych oczek.

Zadanie 3. Załóżmy, że $(X_n)_{n\geqslant 0}$ jest łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów $E = \{1,\ldots,m\}$, którego macierz przejścia $P = (p_{ij})_{i,j=1}^m$ jest podwójnie stochastyczna, tzn. dla każdego $j \in E$ zachodzi $\sum_{i=1}^m p_{ij} = 1$. Wykazać, że $\pi_i = \frac{1}{m}$, $i = 1,\ldots,m$, jest rozkładem stacjonarnym tego łańcucha.

Zadanie 4. W pudełku A jest 6 kul ponumerowanych od 1 do 6, a pudełko B jest początkowo puste. Rzucamy kostką i po każdym rzucie przenosimy kulę o numerze równym wynikowi rzutu do drugiego pudełka. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że dla dużego n pudełko B będzie puste.

Zadanie 5. Po wierzchołkach kwadratu $ABCD$ porusza się pionek, w każdym ruchu przeskakując do losowo wybranego sąsiada z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. W chwili początkowej pionek znajduje się w wierzchołku A. Obliczyć średni czas potrzebny, aby odwiedzić wszystkie wierzchołki kwadratu.