Rachunek prawdopodobieństwa II

semestr zimowy 2023/2024

zadania na ćwiczenia, 18 I 2024

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie stany nieistotne i wszystkie zamknięte zbiory stanów dla łańcuchów Markowa o macierzy przejścia:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5/8 & 1/8 & 1/4 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

Zadanie 2. Załóżmy, że $(X_n)_{n\geqslant 0}$ jest łańcuchem Markowa o macierzy przejścia z poprzedniego zadania oraz że X_0 ma rozkład jednostajny na $\{1,2,3,4\}$. Wyznaczyć rozkład X_1 oraz X_2.

Zadanie 3. Zbadać okresowość łańcuchów Markowa o poniższych macierzach przejścia:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Zadanie 4. Załóżmy, że zmienne $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ są niezależnie i mają ten sam rozkład geometryczny z parametrem $\frac{1}{2}$. Ciąg zmiennych $X_1, X_2, \ldots$ określony jest następująco: $X_0 = 1$, a dla $n \geqslant 0$ przyjmujemy

$$X_{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } Y_n = 1 \\ X_n Y_n, & \text{jeśli } Y_n \neq 1. \end{cases}$$

(a) Wykazać, że $(X_n)_{n\geqslant 0}$ jest nieprzywiedlnym łańcuchem Markowa.

(b) Czy łańcuch ten jest okresowy?

(c) Wykazać, że wszystkie stany łańcucha są powracające.

Zadanie 5. Rozpatrzmy łańcuch Markowa na $\{0, 1, 2, \ldots\}$ o następującej macierzy przejścia: $p_{0,1} = 1$ oraz dla $n \geqslant 1$ $p_{n,n+1} = p$, $p_{n,n-1} = 1 - p$. Wyznaczyć w zależności od parametru $p \in (0, 1)$ wszystkie rozkłady stacjonarne tego łańcucha.

Zadanie 6. Rozważmy asymetryczne błądzenie losowe na prostej, $X_0 = 0$, $X_n = U_1 + \ldots + U_n$ dla $n \geqslant 1$, gdzie $U_1, U_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(U_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(U_n = -1) = 1 - p$. Wykazać, że 0 jest stanem powracającym wtedy i tylko wtedy, gdy $p = \frac{1}{2}$.