Rachunek prawdopodobieństwa II

semestr zimowy 2023/2024

zadania na ćwiczenia, 11 I 2024

Michał Kotowski

Zadanie 1. Rozpatrzmy ciąg niezależnych zmiennych losowych $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ o jednakowym rozkładzie $\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = \frac{1}{2}$. Rozstrzygnąć, które z poniższych procesów są jednorodnymi łańcuchami Markowa, a dla tych, które nimi są, podać macierz przejścia łańcucha.

(a) $X_0 = 0$, $X_n = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$, $n \geqslant 1$,

(b) $Y_0 = 1$, $Y_n = \varepsilon_1 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_n$, $n \geqslant 1$,

(c) $Z_n = 2^{\varepsilon_n}$, $n \geqslant 1$,

(d) $W_n = \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}$, $n \geqslant 1$,

(e) $V_n = \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}$, $n \geqslant 1$.

Zadanie 2. Załóżmy, że E jest zbiorem przeliczalnym, $f : \mathbb{R} \times E \to E$ – funkcją mierzalną (przyjmujemy, że wszystkie podzbiory E są mierzalne), Y_0 – zmienną o wartościach w E, zaś $X_0, X_1, \ldots$ – ciągiem niezależnych zmiennych o tym samym rozkładzie, niezależnym od Y_0. Definiujemy dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$Y_{n+1} = f(X_n, Y_n).$$

Wykazać, że $(Y_n)_{n \geqslant 0}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa i wyznaczyć jego macierz przejścia.

Zadanie 3. Załóżmy, że $(X_n)_{n \geqslant 0}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa o wartościach w E. Wykazać, że dla dowolnej funkcji różnowartościowej $f : E \to E$ ciąg $(f(X_n))_{n \geqslant 0}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Podać przykład, że nie musi tak być, jeśli funkcja f nie jest różnowartościowa.

Zadanie 4. Rozważmy asymetryczne błądzenie losowe na prostej, $X_0 = 0$, $X_n = U_1 + \ldots + U_n$ dla $n \geqslant 1$, gdzie $U_1, U_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(U_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(U_n = -1) = 1 - p$. Wykazać, że następujące procesy są łańcuchami Markowa i wyznaczyć ich macierze przejścia:

(a) $Y_n = |X_n|$,

(b) $Z_n = \max\limits_{k \leqslant n} X_k - X_n$.