Rachunek prawdopodobieństwa II
semestr zimowy 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 14 XII 2023

Michał Kotowski

Zadanie 1. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$ i niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ określamy

$$Z_n = e^{\lambda S_n - n\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Wykazać, że nadmartyngał Z_n jest zbieżny prawie na pewno. Czy jest zbieżny w L^1?

Zadanie 2. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 2]$. Wykazać, że

$$M_n = X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$$

jest martyngałem zbieżnym prawie na pewno, ale nie w L^1.

Zadanie 3. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o następującym rozkładzie:

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2},$$
$$\mathbb{P}(X_n = \pm a_n) = \frac{1}{n^2},$$

gdzie $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 4\sum_{k=1}^{n} a_k$ dla $n \geqslant 1$. Wykazać, że $M_n = X_1 + \ldots + X_n$ jest martyngałem zbieżnym prawie na pewno oraz że $\sup_n \mathbb{E}|M_n| = +\infty$.

Zadanie 4. Rozpatrzmy funkcję $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ spełniającą warunek $\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty$. Wykazać, że jeśli ciąg X_n jest taki, że $\sup_n \mathbb{E}\varphi(|X_n|) < \infty$, to zmienne X_n są jednostajnie całkowalne.

Zadanie 5. Załóżmy, że M_n jest martyngałem takim, że $|M_{n+1} - M_n| \leqslant C < \infty$ dla pewnej stałej $C > 0$ niezależnej od n. Niech

$$A = \left\{\text{istnieje granica } \lim_{n\to\infty} M_n\right\},$$
$$B = \left\{\liminf_{n\to\infty} M_n = -\infty \text{ oraz } \limsup_{n\to\infty} M_n = +\infty\right\}.$$

Wykazać, że $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$.

Zadanie 6. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że X_n ma rozkład Poissona z parametrem n^2. Wykazać, że ciąg

$$M_n = \frac{1}{(n!)^2} X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$$

jest martyngałem oraz zbadać jego zbieżność prawie na pewno, w L^1 i w L^2.