Rachunek prawdopodobieństwa I

semestr letni 2018/2019

zadania domowe, seria 7.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do ich zreferowania na ćwiczeniach w środę **12 czerwca.**

Zadanie 1. Niech X_n będzie ciągiem zmiennych losowych, dla których $\mathrm{Var}X_n \leqslant C$, $C > 0$, oraz współczynnik korelacji $\rho(X_i, X_j) = \frac{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}X_i \cdot \mathrm{Var}X_j}}$ spełnia $\rho(X_i, X_j) \to 0$ dla $|i-j| \to \infty$. Wykazać, że dla ciągu X_n zachodzi słabe prawo wielkich liczb.

Zadanie 2. Oblicz granice:

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\, dx_1 \ldots dx_n,$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \frac{n}{n + x_1 + \ldots + x_n} e^{-(x_1 + \ldots + x_n)}\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Zadanie 3. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych X_n takich, że dla $n \geqslant 1$ zmienna X_n ma rozkład jednostajny na odcinku $[-n, n]$. Dla jakich wartości parametru $\alpha > 0$ szereg

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{X_n}{n^\alpha}$$

jest zbieżny prawie na pewno?

Zadanie 4. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $[-1, 1]$. Zbadać zbieżność prawie na pewno ciągu

$$\frac{X_1 + X_2^2 + \ldots + X_n^n}{n}.$$

Zadanie 5. Dany jest ciąg zmiennych losowych N_n (niekoniecznie niezależnych), przy czym dla $n \geqslant 1$ zmienna N_n ma rozkład Poissona z parametrem n. Wykazać, że $\frac{N_n}{n} \to 1$ w L^1.