Rachunek prawdopodobieństwa I

semestr letni 2018/2019

zadania domowe, seria 6.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do ich zreferowania na ćwiczeniach w środę **5 czerwca.**

Zadanie 1. Rozpatrzmy ciąg X_n, $n \geqslant 2$, niezależnych zmiennych losowych, gdzie zmienna X_n ma rozkład wykładniczy z parametrem $\ln n$. Zbadać zbieżność ciągu X_n według prawdopodobieństwa i prawie na pewno.

Zadanie 2. Rozpatrzmy zmienną losową o średniej μ i wariancji σ^2. Udowodnić dla dowolnego $\alpha \geqslant 0$ nierówność

$$\mathbb{P}\left(X - \mu \geqslant \alpha\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}.$$

Podać przykład, że w ogólności nierówności tej nie da się poprawić. *Wskazówka:* rozpatrzyć zmienną losową przyjmującą tylko dwie wartości.

Zadanie 3. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$. Udowodnić, że zmienne

$$U = \sqrt{-2\log X}\cos(2\pi Y)$$
$$V = \sqrt{-2\log X}\sin(2\pi Y)$$

są niezależne i mają rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$. *Wskazówka:* współrzędne biegunowe.

Zadanie 4. Rozpatrzmy ciąg niezależnych zmiennych losowych X_n, $n \geqslant 1$, o dystrybuantach

$$F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \quad t < 0, \\ 1 - \frac{1}{t+n} & \text{jeśli} \quad t \geqslant 0. \end{cases}$$

Wykazać, że $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, ale $\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ nie zbiega do 0 według prawdopodobieństwa.

Zadanie 5. Załóżmy, że zmienne X, Y są niezależne i spełniają warunki $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 1$, $\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}Y^2 = 1$. Wykazać, że dla dowolnego $t > 0$ zachodzi nierówność

$$\mathbb{P}\left(|X + Y| \geqslant t\right) \leqslant \frac{6}{t^2}.$$