

Rachunek prawdopodobieństwa I
semestr letni 2018/2019
zadania domowe, seria 5.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do ich zreferowania na ćwiczeniach w środę **8 maja**.

Zadanie 1. Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem λ . Dla $t > 0$ obliczyć $\mathbb{E}t^X$.

Zadanie 2. Rozpatrzmy losową permutację N elementów. Niech X_k oznacza liczbę cykli długości k w permutacji, a X łączną liczbę cykli. Znaleźć wartość oczekiwaną X_k oraz X .

Zadanie 3. Urna zawiera N kul w tym b kul białych. Losujemy bez zwracania n kul ($n \leq N$) i definiujemy zmienną losową X jako liczbę wylosowanych kul białych. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję X .

Zadanie 4. Kij o długości 1 złamano w losowo wybranym punkcie. Oblicz wartość oczekiwaną stosunku

- (a) długości kawałka lewego do prawego,
- (b) długości dłuższego kawałka do krótszego.

Zadanie 5. *Turniejem* rozmiaru n nazwiemy graf skierowany powstały z grafu pełnego na n wierzchołkach przez wybór orientacji dla każdej z $\binom{n}{2}$ krawędzi. *Ścieżką Hamiltona* w grafie skierowanym G nazwiemy dowolną skierowaną ścieżkę, która przechodzi przez każdy wierzchołek grafu dokładnie raz. Wykazać, że dla każdego $n \geq 2$ istnieje turniej rozmiaru n , który zawiera co najmniej $\frac{n!}{2^{n-1}}$ ścieżek Hamiltona. *Wskazówka:* jaka jest średnia liczba ścieżek Hamiltona w losowo wybranym turnieju?