Rachunek prawdopodobieństwa I

semestr letni 2018/2019

zadania domowe, seria 3.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do ich zreferowania na ćwiczeniach w środę **3 kwietnia.**

Zadanie 1. Udowodnić, że nie da się sfałszować dwóch kostek (nawet dopuszczając, że każda jest sfałszowana inaczej) tak, aby przy rzucie nimi dowolna suma oczek od 2 do 12 wypadała z równym prawdopodobieństwem.

Zadanie 2. Podać przykład dystrybuanty, której zbiór punktów nieciągłości jest gęsty w $\mathbb{R}$.

Zadanie 3. Niech $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ będzie funkcją niemalejącą, prawostronnie ciągłą, taką że $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$. Zdefiniujmy funkcję $F^{-1}\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ wzorem $F^{-1}(x) = \inf\{t\colon F(t) \geqslant x\}$. Wykaż, że funkcja F^{-1} traktowana jako zmienna losowa na przestrzeni $((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda)$, ma dystrybuantę F.

Zadanie 4. Rozpatrzmy nieskończony ciąg rzutów monetą, na której orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p \in (0,1)$. Oblicz prawdopodobieństwo, że seria orłów długości r wystąpi przed serią reszek długości s, gdzie $r, s \geqslant 1$.

Zadanie 5. Rozpatrzmy $n+1$ punktów o numerach $0, 1, \ldots, n$ umieszczonych kolejno na okręgu. Zaczynamy z punktu 0 i w każdym kroku z prawdopodobieństwem $1/2$ przesuwamy się w lewo, a z prawdopodobieństwem $1/2$ w prawo.

(a) Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 każdy z punktów zostanie kiedyś odwiedzony.

(b) Niech A_k oznacza zdarzenie, że punkt o numerze k został odwiedzony jako ostatni (tzn. wszystkie inne punkty zostały odwiedzone wcześniej przynajmniej raz). Udowodnić, że $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{n}$ dla $k = 1, \ldots, n$. *Wskazówka:* zadanie o ruletce z ćwiczeń.