

Rachunek prawdopodobieństwa I  
semestr letni 2018/2019  
zadania na ćwiczenia, tydzień 4

Michał Kotowski

**Zadanie 1.** Niech  $(\Omega, \mathcal{F})$  będzie przestrzenią mierzalną, zaś  $\mu, \nu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  miarami probablistycznymi. Wykaż, że rodzina  $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F}: \mu(A) = \nu(A)\}$  jest  $\lambda$ -układem.

**Zadanie 2.** Udowodnić, że w nieskończonym ciągu rzutów monetą (symetryczną lub nie) dowolny ustalony podciąg kolejnych wyników (np. ORROORRR) wystąpi z prawdopodobieństwem 1 nieskończenie wiele razy.

**Zadanie 3.** Rzucamy nieskończenie wiele razy niesymetryczną monetą. Niech  $A_n$  oznacza zdarzenie, że w pierwszych  $n$  rzutach było tyle samo orłów, co reszek. Wykazać, że z prawdopodobieństwem 1 zajdzie tylko skończenie wiele zdarzeń  $A_n$ .

**Zadanie 4.** Niech  $A_n$  będą zdarzeniami niezależnymi,  $\mathbb{P}(A_n) = p_n \in (0, 1)$ . Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

- (a) z prawdopodobieństwem 1 zajdzie co najmniej jedno ze zdarzeń  $A_n$ ,
- (b) z prawdopodobieństwem 1 zajdzie nieskończenie wiele ze zdarzeń  $A_n$ .

**Zadanie 5.** Dostojewski gra w ruletkę, w każdej rozgrywce z prawdopodobieństwem  $p \in (0, 1)$  wygrywa 1 rubla, a z prawdopodobieństwem 1 przegrywa 1 rubla. Uznajemy, że przegrał, jeśli w którymś momencie skończą mu się pieniądze, natomiast wygrywa, jeśli będzie miał  $b$  rubli. Obliczyć jego szansę wygranej, jeśli początkowo ma  $a < b$  rubli.