Rachunek prawdopodobieństwa I
semestr letni 2018/2019
zadania na ćwiczenia, tydzień 3

Michał Kotowski

Zadanie 1. Rzucamy dwa razy kostką. Rozpatrzmy zdarzenia A ={za pierwszym razem wypadło 3 lub 6}, B ={za drugim razem wypadło 3 lub 6}, C ={suma wyrzuconych oczek jest parzysta}. Czy zdarzenia A, B, C są niezależne? Czy są niezależne parami?

Zadanie 2. Podać przykład zdarzeń A, B, C, które spełniają $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, ale nie są parami niezależne.

Zadanie 3. Wybieramy losową rodzinę, w której jest n dzieci. Niech $A =$ {w rodzinie jest co najwyżej jedna dziewczynka}, B ={w rodzinie są zarówno chłopcy, jak i dziewczynki}. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

Zadanie 4. Rzucamy n kostkami do gry. Dla $k = 1, \ldots, n$ niech $A_k =$ { na k-tej kostce wypadła szóstka} oraz A_{n+1} ={suma wyrzuconych oczek jest podzielna przez 6}. Wykaż, że dowolne n spośród zdarzeń $A_1, \ldots, A_{n+1}$ jest niezależnych, ale zdarzenia $A_1, \ldots, A_{n+1}$ nie są łącznie niezależne.

Zadanie 5. Na n kartonikach jest zapisanych n różnych liczb rzeczywistych. Kartoniki wkładamy do pudełka, mieszamy, a następnie losujemy kolejno bez zwracania. Niech A_k ={k-ta wylosowana liczba jest większa od wszystkich poprzednich}, $k = 2, \ldots, n$. Udowodnić, że $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{k}$ i zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne.

Zadanie 6. Prawdopodobieństwo tego, że w ciągu jednego dnia na autostradzie będzie k wypadków jest równe $\lambda^k e^{-\lambda}/k!$, $\lambda > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Prawdopodobieństwo tego, że w danym wypadku będzie uczestniczył samochód czerwony wynosi $1/3$. Oblicz prawdopodobieństwo, że w ciągu jednego dnia na autostradzie bedzie l wypadków z udziałem samochodów czerwonych.

Zadanie 7. Wyznacz najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego.

Zadanie 8. Dwaj gracze rzucają niezależnie n razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że otzymają tę samą liczbę orłów?

Zadanie 9. Rzucamy n razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyrzucimy więcej orłów niż reszek?

Zadanie 10. Załóżmy, że dane są liczby naturalne $m, n \geqslant 1$ oraz rzeczywiste $p, q > 0$ takie, że $p + q = 1$. Wykazać, że
$$(1 - p^n)^m + (1 - q^m)^n \geqslant 1.$$

Zadanie 11. Bolek i Lolek grają w bierki do momentu, gdy jeden z nich wygra dwie partie pod rząd. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wygra Lolek, jeśli prawdopodobieństwo wygrania przez niego pojedynczej partii wynosi p? Zakładamy, że wyniki poszczególnych partii są niezależne.

Zadanie 12. Rzucamy $2n$ razy symetryczną monetę. Niech O_{2n} oznacza liczbę wyrzuconych orłów, a R_{2n} liczbę wyrzuconych reszek. Dla ustalonego $k \geqslant 0$ obliczyć
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|O_{2n} - R_{2n}| \leqslant 2k).$$

Zadanie 13. Niech X_n oznacza najdłuższą serię orłów przy n rzutach symetryczną monetą. Udowodnić, że:

(a) $\mathbb{P}(X_n \leqslant a \log_2 n) \to 0$ przy $n \to \infty$ dla $a < 1$,

(b) $\mathbb{P}(X_n \leqslant a \log_2 n) \to 0$ przy $n \to \infty$ dla $a > 1$.