Rachunek prawdopodobieństwa I

semestr letni 2018/2019

zadania na ćwiczenia, tydzień 14

Michał Kotowski

Zadanie 1. Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_n X_n$, gdy:

(a) $\mathbb{P}\left(X_n = 2^{-n}\right) = \mathbb{P}\left(X_n = 0\right) = \frac{1}{2}$,

(b) $\mathbb{P}\left(X_n = 1\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X_n = 0\right) = \frac{1}{n}$.

Zadanie 2. Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Wykazać, że jeśli $\mathbb{P}(X_n \neq 0) > 0$, to szereg $\sum_n X_n$ jest rozbieżny p.n.

Zadanie 3. Niech ε_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych Rademachera. Wykazać, że szereg $\sum_n a_n \varepsilon_n$ jest zbieżny p.n. wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_n a_n^2 < \infty$.

Zadanie 4. Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych, $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{n^3}$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{n^3}$. Wykazać, że szereg $\sum_n X_n$ jest zbieżny p.n., mimo że $\sum_n \mathrm{Var} X_n = +\infty$.

Zadanie 5. Niech ε_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych Rademachera. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_n \frac{\varepsilon_n}{n^\alpha}$ w zależności od parametru $\alpha > 0$.

Zadanie 6. Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Załóżmy, że $\mathbb{E}X_1 = 0$ oraz $\mathbb{E}X_1^4 < \infty$. Wykazać, że $\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{p.n.} 0$.

Zadanie 7. Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych, gdzie

$$\mathbb{P}\left(X_n = n^4\right) = \mathbb{P}\left(X_n = -n^4\right) = \frac{1}{n^2},$$

$$\mathbb{P}\left(X_n = 0\right) = 1 - \frac{2}{n^2}.$$

Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

jest zbieżny do 0 prawie na pewno, ale $\sum_n \frac{\mathrm{Var} X_n}{n^2} = +\infty$.

Zadanie 8. Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych, gdzie X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$. Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

jest zbieżny p.n. i wyznaczyć jego granicę.

Zadanie 9. Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych, gdzie

$$\mathbb{P}\left(X_n = n+1\right) = \mathbb{P}\left(X_n = -(n+1)\right) = \frac{1}{2(n+1)\log(n+1)},$$

$$\mathbb{P}\left(X_n = 0\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}.$$

Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

jest zbieżny do 0 według prawdopodobieństwa, ale nie prawie na pewno.

Zadanie 10. Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ. Udowodnić, że ciągi

(a)

$$\frac{X_1X_2 + X_2X_3 + \ldots + X_nX_{n+1}}{n}$$

(b)

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{X_1^2 + \ldots + X_n^2}$$

są zbieżne p.n. i wyznaczyć ich granice.

Zadanie 11. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{x_1 + \ldots + x_n}\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Zadanie 12. Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, przy czym $\mathbb{E}X_1^- < \infty$, $\mathbb{E}X_1^+ = \infty$. Wykazać, że $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \infty\right) = 1$.