Rachunek prawdopodobieństwa I

semestr letni 2018/2019

zadania na ćwiczenia, tydzień 13

Michał Kotowski

Zadanie 1. Niech $L^0 = L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oznacza przestrzeń wszystkich zmiennych losowch na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, przy czym utożsamiamy ze sobą zmienne losowe równe prawie na pewno. Rozpatrzmy funkcję $d \colon L^0 \times L^0 \to \mathbb{R}_+$ zadaną wzorem

$$d(X,Y) = \mathbb{E}\left(\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right).$$

Wykazać, że d jest metryką na L^0, (L^0, d) jest przestrzenią metryczną zupełną oraz $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d(X_n, X) \to 0$.

Zadanie 2. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, na której zbieżność według prawdopodobieństwa nie jest równoważna zbieżności prawie na pewno. Udowodnić, że nie istnieje na $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ metryka d, która spełniałaby własność $X_n \xrightarrow{p.n.} X \Leftrightarrow d(X_n, X) \to 0$.

Zadanie 3. Rozpatrzmy ciąg zmiennych losowych X_n, $n \geqslant 1$, gdzie X_n ma gęstość

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wykazać, że $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Podać przykład ciągu X_n, dla którego zachodzi też zbieżność prawie na pewno, oraz przykład ciągu, dla którego takiej zbieżności nie ma.

Zadanie 4. Załóżmy, że ciąg niezależnych zmiennych losowych X_n, $n \geqslant 1$, o tym samym rozkładzie spełnia $\mathbb{P}(|X_n| > t) > 0$ dla każdego $t > 0$. Wykazać, że dla pewnych stałych $c_1, c_2, \ldots$ mamy $c_n X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, ale nie ma zbieżności prawie na pewno.

Zadanie 5. Załóżmy, że ciąg zmiennych losowych X_n, $n \geqslant 1$, spełnia $|X_n| \leqslant C$ dla pewnego $C > 0$. Wykazać, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, to $X_n \xrightarrow{L^p} X$ dla dowolnego $p \geqslant 1$.