Rachunek prawdopodobieństwa I

semestr letni 2018/2019

zadania na ćwiczenia, tydzień 12

Michał Kotowski

Zadanie 1. Rozpatrzmy ciąg niezależnych zmiennych Rademachera X_n, $n \geqslant 1$. Czy ciąg X_n jest zbieżny prawie na pewno? Czy jest zbieżny według prawdopodobieństwa?

Zadanie 2. Dla ustalonej całkowalnej zmiennej losowej X rozpatrujemy ciąg zmiennych losowych X_n zadanych wzorem

$$X_n(\omega) = \begin{cases} -n & \text{jeśli} \quad X(\omega) < -n, \\ X(\omega) & \text{jeśli} \quad |X(\omega)| \leqslant n, \\ n & \text{jeśli} \quad X(\omega) > n. \end{cases}$$

Czy ciąg X_n zbiega do X prawie na pewno? Według prawdopodobieństwa? W L^1?

Zadanie 3. Załóżmy, że X_n, $n \geqslant 1$, jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych oraz $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Wykazać, że $\mathbb{P}(X = c) = 1$ dla pewnej stałej $c \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Rozpatrzmy ciąg zmiennych losowych X_n określonych na $\Omega = [0, 1]$ (z miarą Lebesgue'a i σ-ciałem zbiorów borelowskich) wzorem $X_n = n\mathbb{1}_{[0,1/n]}$. Czy ciąg X_n jest zbieżny prawie na pewno? Według prawdopodobieństwa? W L^1?

Zadanie 5. Załóżmy, że $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ oraz $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$. Wykazać, że $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y$.

Zadanie 6. Udowodnić, że dla dowolnych zmiennych losowych X_n, Y_n, X, Y

(a) Jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ oraz $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, to $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.

(b) Jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ oraz $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, to $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - Y_n| > \varepsilon) = 0$ dla każdego $\varepsilon > 0$.

Zadanie 7. Wykazać, że na dyskretnej przestrzeni probabilistycznej zbieżność prawie na pewno jest równoważna zbieżności według prawdopodobieństwa.

Zadanie 8. Załóżmy, że zmienne X_n, $n \geqslant 1$, są niezależne i mają ten sam rozkład. Wykazać, że jeśli $\mathbb{P}(|X_i| < 1) = 1$, to ciąg $Y_n = X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$ jest zbieżny do 0 prawie na pewno.

Zadanie 9. Niech X_n, $n \geqslant 1$, będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takim, że $X_n \sim \text{Poiss}\left(\frac{1}{n}\right)$. Czy ciąg X_n jest zbieżny prawie na pewno? Według prawdopodobieństwa? W L^p dla jakiegokolwiek $p > 0$?

Zadanie 10. Niech X_n, $n \geqslant 1$, będzie ciągiem zmiennych losowych o rozkładzie normalnym, gdzie X_n ma średnią $\frac{1}{n}$ i wariancję $\frac{1}{n^2}$. Wykazać, że $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Zadanie 11. Załóżmy, że zmienne X_n, $n \geqslant 1$, są niezależne, mają ten sam rozkład oraz $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Wykazać, że $\frac{1}{n} \max\limits_{i \leqslant n} |X_i| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Zadanie 12. Wykazać, że jeżeli dla pewnego ciągu $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$ o wyrazach dodatnich spełniającego $\varepsilon_n \searrow 0$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon_n\right) < \infty$$

to X_n zbiega do X prawie na pewno. Podać przykład, że implikacja przeciwna w ogólności nie zachodzi.