Rachunek prawdopodobieństwa I

semestr letni 2018/2019

zadania na ćwiczenia, tydzień 11

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli zmienna X ma skończoną wariancję, to $|\mathbb{E}X - \mathrm{Med}X| \leqslant \sqrt{\mathrm{Var}X}$.

Zadanie 2. Załóżmy, żę X jest zmienną losową o skończonej wariancji oraz $\mathbb{E}X \geqslant 0$. Wykazać, że dla dowolnego $\lambda \in [0,1]$ zachodzi nierówność

$$\mathbb{P}(X > \lambda \mathbb{E}X) \geqslant (1-\lambda)^2 \frac{(\mathbb{E}X)^2}{\mathbb{E}X^2},$$

w szczególności

$$\mathbb{P}(X > 0) \geqslant \frac{(\mathbb{E}X)^2}{\mathbb{E}X^2}.$$

Zadanie 3. Wrzucamy m kul niezależnie i jednostajnie do n urn. Niech A_n oznacza zdarzenie, że żadna z urn nie pozostaje pusta. Wykazać, że jeśli $m > (1+\varepsilon) n \log n$ dla pewnego $\varepsilon > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$.

Zadanie 4. Wykazać, że jeśli $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ to niezależne zmienne Rademachera, zaś $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, to zachodzi nierówność

$$\mathbb{P}\left(|\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n| \geqslant t\right) \leqslant 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2\sum\limits_{i=1}^n a_i^2}\right).$$

Zadanie 5. Wykazać, że jeśli $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ to niezależne zmienne Rademachera, zaś $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, to dla dowolnego $p > 0$ istnieje stała $C_p > 0$ (zależna tylko od p) taka, że

$$\mathbb{E}\left|\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n\right|^p \leqslant C_p \left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)^{p/2}.$$