Rachunek prawdopodobieństwa I
semestr letni 2018/2019
zadania na ćwiczenia, tydzień 10

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wykazać, że jeżeli $X \geqslant 0$ oraz $p > 0$, to

$$\mathbb{E}X^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \mathbb{P}(X \geqslant t) dt = p \int_0^\infty t^{p-1} \mathbb{P}(X > t) dt.$$

Wywnioskować stąd, że jeśli zmienna X ma rozkład skoncentrowany na liczbach naturalnych, to

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}(X > k).$$

Zadanie 2. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_0, X_1, X_2, \ldots$ o tym samym rozkładzie z ciągłą dystrybuantą. Niech $\eta = \inf\{n \colon X_n > X_0\}$. Wyznaczyć rozkład zmiennej η oraz obliczyć $\mathbb{E}\eta$.

Zadanie 3. Załóżmy, że X jest zmienną losową o skończonej wariancji. Obliczyć

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \mathbb{E}(X - t)^2.$$

Zadanie 4. Dany jest wektor losowy (X, Y) taki, że $\mathrm{Var}X = 3$, $\mathrm{Var}Y = 1$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = -1$. Oblicz $\mathrm{Var}(4X - 3Y)$ oraz $\mathrm{Cov}(5X - Y, 2X + Y)$.

Zadanie 5. Niech (X, Y) oznaczają współrzędne punktu wybranego losowo z rozkładu jednostajnego na kole jednostkowym o środku w punkcie $(0, 0)$.

(a) Czy zmienne X, Y są niezależne?

(b) Wykazać, że zmienna X ma taki sam rozkład jak $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$.

(c) Wyznaczyć macierz kowariancji wektora (X, Y).

Zadanie 6. Obliczyć $\mathbb{E}X^n$, $n \geqslant 1$, dla X o standardowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$.

Zadanie 7. Wyznaczyć rozkład sumy $X + Y$, gdzie X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie:

(a) $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, $Y \sim \mathrm{Bin}(m, p)$,

(b) $X \sim \mathrm{Poiss}(\lambda_1)$, $Y \sim \mathrm{Poiss}(\lambda_2)$,

(c) $X, Y \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

Zadanie 8. Załóżmy, że X_1, X_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ, a $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ niezależnymi zmiennymi o rozkładzie $\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}$. Wyznaczyć rozkład zmiennych $\varepsilon_i X_i$ oraz $X_1 - X_2$.

Zadanie 9. Wykazać, że jeżeli X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi i X ma rozkład ciągły, to $X + Y$ również ma rozkład ciągły.

Zadanie 10. Załóżmy, że X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Cauchy'ego z parametrami odpowiednio h_1 i h_2. Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Y$ oraz cX dla $c \in \mathbb{R}$.