Funkcje analityczne
semestr zimowy 2019/2020
zadania domowe, seria 6.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do zreferowania rozwiązań na ćwiczeniach we wtorek **21 stycznia.**

Zadanie 1. Dla każdej z poniższych funkcji wyznaczyć jej residua we wszystkich punktach osobliwych:

(a) $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+4)}$

(b) $f(z) = z^n \sin\left(\frac{1}{z}\right)$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$

(c) $f(z) = \operatorname{ctg}^2 z$

Zadanie 2. Korzystając z metody residuów obliczyć całki:

(a)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\cos t + a^2}\, dt, \quad a \in (0,1)$$

(b)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos t}\, dt, \quad a > 1$$

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^5 - 1}\, dx$$

Zadanie 3. Niech $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną w otwartym dysku jednostkowym o środku w 0. Załóżmy, że $f\left(\frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$. Dowieść, że $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

Zadanie 4. Rozważmy funkcję $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)(2+z^2)}$. Rozwinąć f w szereg Laurenta a) w pierścieniu $\{1 < |z| < \sqrt{2}\}$, b) w zbiorze $\{|z| > \sqrt{2}\}$.

Zadanie 5. Załóżmy, że $P, Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ są wielomianami takimi, że $\deg Q = \deg P + 1$ oraz współczynnik przy najwyższej potędze z w każdym z nich jest równy 1. Niech $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Udowodnić, że jeżeli dysk D zawiera w swoim wnętrzu wszystkie bieguny funkcji f, to

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\, dz = 2\pi i.$$