Funkcje analityczne
semestr zimowy 2019/2020
zadania domowe, seria 4.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do zreferowania rozwiązań na ćwiczeniach we wtorek **26 listopada.**

Zadanie 1. Zbadać zbieżność poniższych szeregów dla $z \in \mathbb{C}$:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{4n}}{4n}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$

(c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n} z^{3n-1}$

Zadanie 2. Korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego wyprowadzić dla $|z| < 1$ tożsamość

$$-\mathrm{Log}(1-z) = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n+1} z^{n+1} + \int\limits_{[0,z]} \frac{w^{m+1}}{1-w}\, dw,$$

gdzie całka jest po odcinku od 0 do z. Wywnioskować z niej, że dla wszystkich $z \neq -1$ takich, że $|z| \leqslant 1$, zachodzi

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

i wyprowadzić z powyższego wzoru tożsamość

$$\frac{\theta}{2} = \sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta - \ldots, \quad \theta \in (-\pi, \pi).$$

Zadanie 3. Znaleźć rozwinięcie funkcji $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ w szereg Taylora wokół $z = 1$ i wyznaczyć promień zbieżności otrzymanego szeregu.

Zadanie 4. Załóżmy, że $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dla $|z| < 1$ oraz $|a_1| \geqslant \sum\limits_{n=2}^{\infty} n|a_n|$. Wykazać, że f jest róznowartościowa dla $|z| < 1$.

Zadanie 5.

(a) Rozpatrzmy $z \in S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ i niech $z_n \in \mathbb{C}$ będzie ciągiem punktów takim, że $|z_n| < 1$ oraz $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Załóżmy ponadto, że wszystkie punkty z_n leżą wewnątrz pewnego kąta o wierzchołku z ograniczonego dwiema cięciwami okręgu. Udowodnić, że ciąg $\frac{|z-z_n|}{1-|z_n|}$ jest ograniczony.

(b) Niech $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ będzie zbieżnym szeregiem liczb zespolonych. Udowodnić, że funkcja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ jest dobrze określona dla $|z| < 1$. Następnie pokazać, że jeśli z_n zbiegają do 1 jak w punkcie (a), to $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

Wskazówka: dla $C_n = c_1 + \ldots + c_n$ udowodnić, że $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ jest zbieżny dla $|z| < 1$; następnie dla $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ pokazać, że $f(z) = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ oraz $f(z) - C = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty}(C_n - C)z^n$.