

Funkcje analityczne
semestr zimowy 2019/2020
zadania domowe, seria 3.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do zreferowania rozwiązań na ćwiczeniach we wtorek **19 listopada**.

Zadanie 1. Rozpatrzmy otwarty dysk jednostkowy $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Wykazać, że dla $z \in D$ funkcja $f(z) = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{1+iz}{1-iz}$ jest poprawnie określoną gałęzią funkcji arctg , tj. jest ciągła i spełnia równanie $\operatorname{tg} f(z) = z$.

Zadanie 2. Obliczyć całki po drogach:

- (a) $\int_{\gamma} e^{\bar{z}} dz$, gdzie γ to łamana łącząca punkty 0, 1 oraz $1+i$
- (b) $\int_{\gamma} \sin(2z+1) dz$, gdzie $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$
- (c) $\int_{\gamma} z^n \bar{z}^m dz$, gdzie γ jest okręgiem jednostkowym, a $n, m \in \mathbb{Z}$

Zadanie 3. Niech $f(z) = \operatorname{Log} \frac{1+z}{1-z}$. Znaleźć obraz dysku jednostkowego $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ przy przekształceniu f .

Zadanie 4. Znaleźć funkcję f , która przekształca różnowartościowo i konforemnie:

- (a) górną połowę dysku jednostkowego $D_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \Im z > 0\}$ na górną półpłaszczyznę
- (b) zbiór $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{3}, 0 < |z| < 1\}$ na dysk jednostkowy $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

Wskazówka: rozwiązać najpierw podpunkt (a); w obu przypadkach przedstawić f jako złożenie kilku przekształceń, z których jedno jest odpowiednią homografią

Zadanie 5. Wykazać, że równanie $\operatorname{tg} z = z$ ma wyłącznie pierwiastki rzeczywiste.