Funkcje analityczne
semestr zimowy 2019/2020
zadania domowe, seria 2.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do zreferowania rozwiązań na ćwiczeniach we wtorek **12 listopada.**

Zadanie 1. Udowodnić oszacowania:

(a) $|\sinh(\Im z)| \leqslant |\cos z| \leqslant |\cosh(\Im z)|$

(b) $|\sin z| \leqslant \cosh |z|$

(c) $|\operatorname{tg} z|^2 \leqslant 1 + \frac{1}{\sinh^2(\Im z)}$

Zadanie 2. Udowodnić, że na płaszczyźnie zespolonej każdy dysk o promieniu $\pi\sqrt{2}$ zawiera punkt $z \in \mathbb{C}$ taki, że $\cos z \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 3. Znaleźć zbiór możliwych wartości funkcji $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ (określonej dla $z \in \mathbb{C}$ takich, że $\cos z \neq 0$).

Zadanie 4. Niech $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

(a) Znaleźć obrazy okręgów $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ o środku w 0 przy przekształceniu f.

(b) Udowodnić, że f przekształca różnowartościowo i konforemnie zbiory $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ oraz $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ na $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Zadanie 5. Załóżmy, że $f : U \to V$ jest różnowartościowym, konforemnym przekształceniem obszaru U na V. Dla dowolnej funkcji $\phi : V \to \mathbb{R}$ niech $\psi = \phi \circ f$. Wykazać, że ϕ jest harmoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy ψ jest harmoniczna, oraz że f przeprowadza poziomice ψ na poziomice ϕ.