Funkcje analityczne
semestr zimowy 2019/2020
zadania domowe, seria 1.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do zreferowania rozwiązań na ćwiczeniach we wtorek **29 października.**

Zadanie 1. Znaleźć ogólną postać homografii zachowujących: a) dysk jednostkowy $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, b) górną półpłaszczyznę $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$.

Zadanie 2. Znaleźć homografię przeprowadzającą zbiór $D \cap \mathbb{H}_+$ (gdzie D, $\mathbb{H}_+$ jak w poprzednim zadaniu) na ćwiartkę dodatnią $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0, \Im z > 0\}$. Opisać obrazy prostych przechodzących przez 0 i okręgów o środku w 0 przy tej homografii.

Zadanie 3. Załóżmy, że u jest funkcją harmoniczną w obszarze $U \subseteq \mathbb{C}$. Wykazać, że funkcja $f = u_x - iu_y$ jest holomorficzna w U. Udowodnić, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, żeby istniała funkcja harmoniczna sprzężona do u, jest istnienie w U funkcji pierwotnej do f (tzn. takiej funkcji holomorficznej $F : U \to \mathbb{C}$, że $F' = f$).

Zadanie 4. Znaleźć wszystkie funkcje harmoniczne na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, które są stałe na okręgach o środku w 0.

Zadanie 5. Dla zadanej funkcji $u(x, y)$ znaleźć wszystkie funkcje harmoniczne do niej sprzężone i odpowiednie funkcje holomorficzne:

(a) $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$,

(b) $u(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$, $x + iy \neq 0$,

(c) $u(x, y) = 2e^x \sin y$.