Funkcje analityczne
semestr zimowy 2019/2020
zadania na ćwiczenia, tydzień 9.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Obliczyć całkę
$$\int_\Gamma \frac{e^{\pi z}}{1+z^2}\, dz,$$
gdzie Γ jest zorientowanym dodatnio prostokątem o wierzchołkach $-\frac{1}{2}-2i, 1-2i, 1+2i, -\frac{1}{2}+2i$.

Zadanie 2. Niech $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną. Załóżmy, że istnieją $n \in \mathbb{N}$ oraz $M > 0$ takie, że o ile $|z| \geqslant 1$, to spełnione jest oszacowanie
$$|f(z)| \leqslant M|z|^n.$$
Wykazać, że f jest wielomianem stopnia co najwyżej n.

Zadanie 3. Załóżmy, że P i Q są wielomianami takimi, że $\deg Q > \deg P + 1$. Wykazać, że $\int\limits_{\partial D} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 0$ dla dowolnego dysku D zawierającego wszystkie miejsca zerowe Q.

Zadanie 4. Obliczyć całkę
$$\int\limits_0^\infty \cos(t^2)\, dt.$$
Wskazówka: scałkować odpowiednią funkcję holomorficzną po trójkącie o wierzchołkach 0, R, $R + iR$ i przejść z $R \to \infty$.

Zadanie 5. Niech f będzie funkcją holomorficzną określoną na pewnym otwartym otoczeniu dysku jednostkowego D. Wykazać, że jeśli $f(\partial D) \subseteq \mathbb{R}$, to $f|_D$ jest funkcją stałą.