Funkcje analityczne
semestr zimowy 2019/2020
zadania na ćwiczenia, tydzień 8.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Niech γ będzie kawałkami liniową parametryzacją łamanej $[w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_0]$, gdzie $w_0 = 0$, $w_1 = 2$, $w_2 = i$, $w_3 = 2 + 2i$, $w_4 = -2i$. Obliczyć całkę

$$\int_\gamma \frac{e^{2z}}{z - z_0}\, dz$$

dla a) $z_0 = \frac{1}{2} - \frac{i}{3}$, b) $z_0 = \frac{1}{2} + \frac{5i}{8}$, a) $z_0 = \frac{1}{2} + i$.

Zadanie 2. Obliczyć całkę

$$\int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{1 + z^2}\, dz$$

dla a) γ będącego okręgiem o środku $1+i$ i promieniu $3/2$, b) γ będącego brzegiem prostokąta o wierzchołkach $-\frac{1}{2} - 2i$, $1 - 2i$, $1 + 2i$, $-\frac{1}{2} + 2i$.

Zadanie 3. Rozpatrując całkę z funkcji $e^{-z^2/2}$ po brzegu odpowiednio dobranego prostokąta wywnioskować wzór:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) e^{x^2/2}\, dx = e^{-t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx.$$

Zadanie 4. Udowodnić, że jeśli P i Q są wielomianami takimi, że $\deg Q > \deg P + 1$, to dla dowolnego dysku otwartego D zawierającego wszystkie zera wielomianu Q zachodzi

$$\int_{\partial D} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 0.$$

Zadanie 5. Niech $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną taką, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ oraz $R, M > 0$ zachodzi

$$|f(z)| \leqslant M|z|^n$$

o ile tylko $|z| > R$. Wywnioskować, że f musi być wielomianem stopnia co najwyżej n.

Zadanie 6. Niech U będzie otwartym, ograniczonym podzbiorem płaszczyzny zespolonej, a $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ funkcją ciągłą na $\overline{U}$ i holomorifczną na U. Wykazać, że jeśli f nie jest funkcją stałą i $|f|$ nie jest stały na ∂U, to funkcja f zeruje się w co najmniej jednym punkcie $z_0 \in U$.