Funkcje analityczne

semestr zimowy 2019/2020

zadania na ćwiczenia, tydzień 6.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Obliczyć całki po drogach:

(a) $\int_\gamma \bar{z}\, dz$, gdzie $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

(b) $\int_\gamma \frac{1}{\bar{z}}\, dz$, gdzie $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi/2]$

(c) $\int_\gamma \Re z\, dz$, gdzie $\gamma(t) = t(1+i)$, $t \in [0, 1]$

Zadanie 2. Obliczyć poniższe całki dla konturu γ będącego łamaną łączącą punkty $0, 1$ oraz $1+i$:

(a) $\int_\gamma e^z\, dz$

(b) $\int_\gamma e^{\bar{z}}\, dz$

Zadanie 3. Załóżmy, że $f : U \to \mathbb{C}$ jest funkcją ciągłą, która posiada w U funkcję pierwotną F. Udowodnić, że dla dowolnego odcinka $[a, b] \subseteq U$ istnieje taki punkt $\zeta \in \overline{\mathrm{conv}} f([a, b])$, że zachodzi $F(b) - F(a) = (b - a)\zeta$.

Zadanie 4. Załóżmy, że $F : U \to \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną określoną na obszarze wypukłym U i dla każdego $z \in U$ zachodzi $\Re F'(z) > 0$. Wykazać, że F jest funkcją różnowartościową.

Zadanie 5. Wykazać, że funkcja $F(z) = z^n + nz + a$, gdzie $n \geqslant 1$, $a \in \mathbb{C}$, jest różnowartościowa w kole jednostkowym.