Funkcje analityczne

semestr zimowy 2019/2020

zadania na ćwiczenia, tydzień 3.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Rozpatrzmy zbiór otwarty $U \subseteq \mathbb{C}$ i funkcję $f : U \to \mathbb{C}$ różniczkowalną w punkcie $z_0 \in U$. Dowieść, że funkcja $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ jest różniczkowalna w punkcie $\overline{z_0}$.

Zadanie 2. Niech $f = u + iv$. Wykazać, że jeśli f jest różniczkowalna (w sensie zespolonym) w $z_0 \in \mathbb{C}$, to $\langle \nabla u(z_0), \nabla v(z_0) \rangle = 0$. Podać interpretację geometryczną tego faktu.

Zadanie 3. Niech $f = u + iv$ będzie funkcją holomorficzną w pewnym obszarze $U \subseteq \mathbb{C}$. Wykazać, że jakobian przekształcenia $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ jest równy $|f'|^2$ i podać interpretację geometryczną tego faktu.

Zadanie 4. Dla zadanej funkcji $u(x, y)$ znaleźć wszystkie funkcje harmonicznie do niej sprzężone i odpowiednie funkcje holomorficzne:

(a) $u(x, y) = xy$,

(b) $u(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$, $x + iy \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.