Funkcje analityczne

semestr zimowy 2019/2020

zadania na ćwiczenia, tydzień 10.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Niech $f : \overline{\mathbb{H}} \to \mathbb{C}$, gdzie $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$, będzie funkcją ciągłą na $\overline{\mathbb{H}}$ i holomorficzną na $\mathbb{H}$. Załóżmy, że dla pewnych $C > 0$ i $\alpha > 0$ spełnione jest oszacowanie

$$|f(z)| \leqslant \frac{C}{|z|^\alpha}$$

dla dowolnych $z \in \mathbb{H}$. Wykazać, że wówczas dla dowolnego $z_0 \in \mathbb{H}$ zachodzi

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t - z_0} \, dt.$$

Zadanie 2. Rozpatrzmy zbiór $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 0, \mathrm{Arg} z \in (-\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{9})\}$. Załóżmy, że $f : \overline{V} \to \mathbb{C}$ jest funkcją ciągłą na $\overline{V}$ i holomorficzną na V spełniającą $|f(z)| \leqslant 1$ dla $z \in \partial V$ oraz $|f(z)| \leqslant e^{|z|^2}$ dla $z \in V$. Wykazać, że wówczas $|f(z)| \leqslant 1$ dla dowolnego $z \in V$.

Zadanie 3. Załóżmy, że U jest obszarem ograniczonym, a $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ funkcją ciągłą holomorficzną na U. Wykazać, że jeśli $|f|$ jest stały na brzegu ∂U, to albo f jest funkcją stałą, albo posiada co najmniej jedno miejsce zerowe w U.