Funkcje analityczne

semestr zimowy 2019/2020

zadania na ćwiczenia, tydzień 1.

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wykazać, że dowolną homografię $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$ można przedstawić jako złożenie przesunięcia ($z \mapsto z + \alpha$), inwersji ($z \mapsto \frac{1}{z}$) i podobieństwa ($z \mapsto Az + B$).

Zadanie 2. Wykazać, że obrazem okręgu lub prostej przy homografii jest okrąg lub prosta. Udowodnić, że jeśli T jest okręgiem lub prostą i S jest okręgiem lub prostą, to istnieje homografia przeprowadzająca T na S.

Zadanie 3. Wykazać, że każda homografia różna od identyczności ma co najmniej jeden i co najwyżej dwa punkty stałe w $\bar{\mathbb{C}}$. Wykazać, że jeżeli jedynym punktem stałym h jest ∞, to $h(z) = z + b$ dla pewnego $b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$, natomiast jeśli punktami stałymi h są 0 i ∞, to $h(z) = az$ dla pewnego $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0, 1$.

Zadanie 4. Przekształcenia $f, g : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ nazwiemy *homograficznie sprzężonymi*, jeżeli $f = h \circ g \circ h^{-1}$ dla pewnej homografii h. Wykazać, że dowolna homografia jest w ten sposób sprzężona z przesunięciem bądź ze złożeniem obrotu wokół 0 i jednokładności o środku w 0. Wywnioskować, że jeżeli homografia f nie jest sprzężona z obrotem, to istnieją punkty $p, q \in \bar{\mathbb{C}}$ takie, że $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(z) = p$, $\lim\limits_{n\to\infty} f^{-n}(z) = q$ dla dowolnego $z \in \bar{\mathbb{C}}$. Co więcej, f jest sprzężona z przesunięciem wtedy i tylko wtedy, gdy $p = q$. Co można powiedzieć o ciągach $f^n(z), f^{-n}(z)$, gdy f jest sprzężona z obrotem?