Funkcje analityczne

semestr zimowy 2019/2020

uwagi do ćwiczeń z 29 X 2019

Michał Kotowski

Spróbujmy rozwiązać zadanie 3. z 1. serii zadań domowych.

Zadanie 1. Załóżmy, że u jest funkcją harmoniczną w obszarze $U \subseteq \mathbb{C}$. Wykazać, że funkcja $f = u_x - iu_y$ jest holomorficzna w U. Udowodnić, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, żeby istniała funkcja harmoniczna sprzężona do u, jest istnienie w U funkcji pierwotnej do f (tzn. takiej funkcji holomorficznej $F : U \to \mathbb{C}$, że $F' = f$).

Zacznijmy od przypomnienia następującego faktu – jeśli $F : U \to \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną i $F = u + iv$ (przy notacji jak zwykle – $u = \Re F$, $v = \Im F$), to $F' = u_x + iv_x$. Istotnie, z definicji pochodnej zespolonej mamy dla $z \in U$:

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h},$$

gdzie granica istnieje dla *dowolnego* ciągu liczb zespolonych $h \to 0$. A skoro dla dowolnego, to możemy wziąć $h \in \mathbb{R}$ takie, że $h \to 0$, i wtedy dla $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, granica ma postać:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h} \right),$$

w czym rozpoznajemy definicję pochodnych cząstkowych u_x i v_x (skorzystaliśmy tu z faktu, że jeśli powyższa granica istnieje, to istnieją też osobno granice części rzeczywistej i urojonej).

Zwróćmy uwagę (bardzo proszę, żeby każdy, kto nie czuje się tu całkowicie pewnie, dokładnie to sobie sprawdził), że jeśli powtórzymy analogiczne rozumowanie, ale dla przyrostów czysto urojonych, to dostaniemy wzór na F' w terminach pochodnych cząstkowych u_y i v_y, co pozwoli nam odtworzyć równania Cauchy'ego-Riemanna!

Przypominam też, że o ile możemy napisać $F' = u_x + iv_x$, to napis $F' = u' + iv'$, gdzie u', v' oznaczają pochodne w sensie zespolonym, jest niepoprawny, bo żadna z funkcji u, v z osobna nie jest (poza trywialnym przypadkiem funkcji stałej) różniczkowalna w sensie zespolonym (ale ich kombinacja liniowa nad $\mathbb{C}$, czyli właśnie $F = u + iv$, już jest różniczkowalna!).

Wracamy teraz do naszego zadania. Załóżmy najpierw, że istnieje funkcja harmoniczna v sprzężona do u. Wówczas $F = u + iv$ jest funkcją holomorficzną i z powyższych rozważań

$F' = u_x + iv_x$. Na mocy równań Cauchy'ego-Riemanna $v_x = -u_y$, czyli $F' = u_x - iu_y$, a to jest dokładnie nasza funkcja f, czyli $F' = f$, zatem F jest funkcją pierwotną f.

W drugą stronę, przypuśćmy, że istnieje $F = u + iv$, która jest pierwotna do f. Wówczas $F' = u_x + iv_x$ i z równań Cauchy'ego-Riemanna mamy $u_x = v_y$, zatem $F' = v_y + iv_x$. Ponieważ z założenia $F' = f = u_x - iu_y$, to musi być $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Stąd widzimy, że u i v spełniają równania Cauchy'ego-Riemanna, zatem v jest szukaną funkcją harmoniczną.

Na przykładzie funkcji $u(x, y) = \log\sqrt{x^2 + y^2}$, określonej na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, widzieliśmy, że szukana funkcja harmoniczna sprzężona do u może nie istnieć (a zatem może nie istnieć funkcja pierwotna do $f = u_x - iu_y$). Odpowiedź na pytanie „kiedy zatem wiadomo na pewno, że taka funkcja istnieje?" ma charakter topologiczny i być może pojawi się za jakiś czas na wykładzie.