Funkcje analityczne

semestr zimowy 2019/2020

uwagi do ćwiczeń z 19 XI 2019

Michał Kotowski

Spróbujmy rozwiązać zadanie z dzisiejszych ćwiczeń:

Zadanie 1. Załóżmy, że wielomian $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ spełnia $\sup\limits_{|z|=1} |f(z)| = M$. Udowodnić, że $\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|^2 \leqslant M^2$.

Rozważając f oraz $\bar{f}$ otrzymujemy dla dowolnego $z \in S^1$:

$$|f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)} = (a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n)\left(\overline{a_0} + \overline{a_1}\bar{z} + \ldots + \overline{a_n}\bar{z}^n\right) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 |z|^{2k} + \sum_{k \neq j} a_k \overline{a_j} z^k \bar{z}^j.$$

Przyjmując $z = e^{it}$ dla $t \in [0, 2\pi]$ i zauważając, że $z^k \bar{z}^j = e^{it(k-j)}$ możemy przepisać to jako

$$|f(e^{it})|^2 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 + \sum_{k \neq j} a_k \overline{a_j} e^{it(k-j)}.$$

Teraz odcałkowujemy obie strony po t na przedziale od 0 do 2π, otrzymując

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 \, dt = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \, dt + \sum_{k \neq j} a_k \overline{a_j} \int_0^{2\pi} e^{it(k-j)} \, dt.$$

Korzystamy teraz z faktu, że dla $k \neq j$ całka $\int\limits_0^{2\pi} e^{it(k-j)} \, dt$ wynosi 0, co jest innym sposobem powiedzenia, że całka z zadania domowego z 3. serii:

$$\int_{S^1} z^n \bar{z}^m \, dz$$

jest niezerowa tylko dla $n + 1 = m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

Ponieważ $\sup\limits_{|z|=1} |f(z)| = M$, to możemy w takim razie napisać

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \, dt = \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 \, dt \leqslant 2\pi M^2$$

a ponieważ wyrazy po lewej strona pod całką nie zależą od t, to 2π się skraca i dostajemy

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \leqslant M^2.$$

Morał z zadania: pisząc rachunki tego typu dla funkcji na okręgu $\partial D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ i przyjmując $z = re^{it}$ nie należy mylić całki $\int\limits_0^{2\pi} f(re^{it})\,dt$ z całką $\int\limits_{\partial D_r} f(z)\,dz$ – druga z tych całek ma „ukryte" w sobie dodatkowe e^{it} z parametryzacji okręgu i jest zawsze równa 0, jeśli f jest holomorficzna we wnętrzu dysku.