Analiza matematyczna II.1

semestr zimowy 2019/2020

zadania domowe, seria 6.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do zreferowania rozwiązań na ćwiczeniach w piątek **17 I 2020.**

Zadanie 1. Niech $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x > 0, xy \geqslant 1\}$. Wyznaczyć jawnym wzorem dyfeomorfizm pomiędzy U a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Zadanie 2. Niech

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}.$$

Wyznaczyć przestrzeń styczną do T w punkcie $p = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$.

Zadanie 3. Dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ rozważmy zbiór

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, x^2 - y^2 + tz^3 = 0\}.$$

Rozsztrzygnąć, dla jakich t zbiór ten jest rozmaitością klasy C^1.

Zadanie 4. Wyznaczyć kres górny funkcji $f(x,y,z) = xy - z$ na zbiorze

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leqslant 1, x+y+z \geqslant 0\}.$$

Zadanie 5. Dla dowolnego n rozważmy macierz $J \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ o postaci klatkowej

$$J = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & -I_{n\times n} \\ I_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix},$$

gdzie $0_{n\times n}$ oznacza macierz rozmiaru $n \times n$ złożoną z samych zer, a $I_{n\times n}$ macierz identycznościową rozmiaru $n \times n$. Wykazać, że zbiór

$$G = \{A \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R}) : AJA^T = J\}$$

jest rozmaitością wymiaru $n(2n+1)$.