Analiza matematyczna II.1

semestr zimowy 2019/2020

zadania domowe, seria 5.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do zreferowania rozwiązań na ćwiczeniach w piątek **20 XII 2019.**

Zadanie 1. Wykazać, że równanie $z^5 - xz + y^5 = 0$ w otoczeniu punktu $x_0, y_0, z_0 = (1, 0, 1)$ wyznacza z jako funkcję $z = z(x, y)$ klasy C^∞. Wyznaczyć wielomian Taylora rzędu 2 tej funkcji w otoczeniu punktu $(1, 0)$.

Zadanie 2. Załóżmy, że $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest klasy C^1 oraz istnieje taka stała $C > 0$, że

$$\langle dF(x)v, v\rangle \geqslant C \|v\|^2$$

dla dowolnych $x, v \in \mathbb{R}^n$. Udowodnić, że F jest dyfeomorfizmem oraz $F(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Zadanie 3. Niech $B_p = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p < 1\}$, gdzie $p \geqslant 1$, będzie otwartą kulą jednostkową w normie ℓ^p na $\mathbb{R}^n$. Skonstruować dyfeomorfizm pomiędzy B_p a $\mathbb{R}^n$.

Zadanie 4. Niech $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$ i $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty = 1\}$. Rozstrzygnąć, czy istnieje dyfeomorfizm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ klasy C^1 taki, że $f(A) = B$.

Zadanie 5. Niech $U \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{R})$ oznacza zbiór wszystkich nieosobliwych macierzy kwadratowych $n\times n$. Określamy odwzorowanie $\Phi : U \to U$ wzorem $\Phi(A) = A^{-1}$. Pokazać, że Φ jest odwzorowaniem klasy C^∞.