Analiza matematyczna II.1

semestr zimowy 2019/2020

zadania domowe, seria 2.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do zreferowania rozwiązań na ćwiczeniach w piątek **25 X 2019.**

Zadanie 1. Zbadaj istnienie granic:

(a)

$$\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \left(\sqrt{\frac{1}{x^4+y^4} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^4+y^4} + \frac{1}{y}} \right),$$

(b)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{z^2 \sin(x^2+y^2)}{x^2 y + z^2}.$$

Zadanie 2. Rozpatrzmy zbiór $A = [1,2] \times [0, 2\pi)$ i przekształcenie $f : A \to \mathbb{R}^2$ zadane wzorem

$$f(x,y) = (x\cos y, x \sin y).$$

Niech $B = f(A)$. Udowodnić, że f jest ciągłe i różnowartościowe, ale przekształcenie $f^{-1} : B \to A$ nie jest ciągłe.

Zadanie 3. Zbadaj ciągłość funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

(a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(x^3+y^2) \ln \sqrt{|xy|}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \exp\left(-\frac{y}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zadanie 4. Oblicz pochodne cząstkowe funkcji $f(x,y) = x\cos y$, $g(x,y) = x^y$, $h(x,y,z) = x^{y^z}$.

Zadanie 5. Zbadaj różniczkowalność funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+xy)}{y}, & y \neq 0, xy > -1, \\ x, & y = 0, \end{cases}$$

w każdym punkcie swojej dziedziny $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > -1\}$.