Analiza matematyczna II.1

semestr zimowy 2019/2020

zadania na ćwiczenia, 25 i 29 X 2019

Michał Kotowski

Zadanie 1. Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma ograniczone pochodne cząstkowe w całej dziedzinie, tzn. istnieje stała $M > 0$ taka, że dla każdego $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ zachodzi

$$\max\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, x_2)\right|, \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, x_2)\right|\right\} \leqslant M.$$

Wykazać, że wówczas f jest lipschitzowska ze stałą M (w szczególności jest ciągła), tj. dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}^2$ zachodzi $|f(a) - f(b)| \leqslant M \|a - b\|_1$.

Zadanie 2. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daną wzorem:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Wykazać, że pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ są ograniczone na $\mathbb{R}^2$ (w szczególności funkcja f jest ciągła).

(b) Wykazać, że dla dowolnego wektora $v \in \mathbb{R}^2$ spełniającego $\|v\|_2 = 1$ istnieje pochodna kierunkowa $f'_v(0, 0)$ oraz $|f'_v(0, 0)| \leqslant 1$.

(c) Wykazać, że dla dowolnej krzywej różniczkowalnej $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ spełniającej $\gamma(0) = (0, 0)$ oraz $d\gamma(0) \neq 0$ funkcja $t \mapsto f(\gamma(t))$ jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$.

(d) Wykazać, że pomimo to nie istnieje różniczka funkcji f w punkcie $(0, 0)$.

Zadanie 3. Określić maksymalny podzbiór dziedziny, na którym dana funkcja f jest różniczkowalna, i znaleźć w tych punktach postać jej różniczki:

(a) $f(x, y, z) = (|x| + |y|) \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

(b) $f(x, y) = |e^x - y|(e^x - 1)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Zadanie 4. Dla ustalonej macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ rozpatrzmy funkcję $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = \|Ax\|^2$. Wyznacz różniczkę funkcji f na dwa sposoby – bezpośrednio z definicji oraz korzystając ze wzoru na różniczkę złożenia funkcji.