Analiza matematyczna II.1

semestr zimowy 2019/2020

zadania na ćwiczenia, 15 X 2019

Michał Kotowski

Zadanie 1. Zbadaj istnienie granic:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$,

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$,

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$,

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sin(x^2+y^2)}$.

Zadanie 2. Rozpatrzmy funkcję $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. Wykazać, że $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$, ale granica $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nie istnieje.

Zadanie 3. Rozpatrzmy funkcję $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)$. Wykazać, że granica $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ nie istnieje, ale $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Zadanie 4. Rozpatrzmy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{yx^2}{y^2+x^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Wykazać, że f jest ciągła po obcięciu do dowolnej prostej przechodzącej przez $(0,0)$, ale nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$.

Zadanie 5. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji zadanej wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^3-y}, & y \neq x^3, \\ 1, & y = x^3. \end{cases}$$

Zadanie 6. Rozważmy funkcję ciągłą $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dla $n \geqslant 2$. Załóżmy, że istnieją $a, b \in \mathbb{R}^n$ takie, że $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Wykazać, że f ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.