Analiza matematyczna II.1

semestr zimowy 2019/2020

zadania na ćwiczenia, 21 i 24 I 2020

Michał Kotowski

Zadanie 1. Udowodnić, że jeśli zbiór $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ pokryjemy skończoną liczbą przedziałów, to suma długości tych przedziałów jest nie mniejsza niż 1.

Zadanie 2. Powiemy, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest *silnie miary zero*, jeżeli dla dowolnego ciągu $\varepsilon_n > 0$ istnieja rodzina odcinków I_n takich, że $\lambda(I_n) < \varepsilon_n$ oraz $A \subseteq \cup_{n \geqslant 1} I_n$. Wykazać, że dowolny zbiór przeliczalny jest silnie miary zero. Udowodnić, że zbiór Cantora nie jest silnie miary zero. *Wskazówka:* pokazać, że jeśli $A \subseteq [0, 1]$ jest silnie miary zero, a $f : [0, 1] \to [0, 1]$ jest ciągła, to $f(A)$ również jest silnie miary zero.

Zadanie 3. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1. Udowodnić, że jeżeli zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest miary zero, to $f(A)$ również jest miary zero.

Zadanie 4. Udowodnić następującą charakteryzację zbiorów miary zero: zbiór A jest miary zero wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg funkcji schodkowych $\{h_n\}_{n \geqslant 1}$ takich, że

$$0 \leqslant h_1 \leqslant h_2 \leqslant \ldots$$

oraz $\int h_n < \varepsilon$ i dla każdego $x \in A$ mamy $\sup_{n \geqslant 1} h_n(x) \geqslant 1$.

Zadanie 5. Sprawdzić, że funkcje schodkowe spełniają *aksjomat ciągłości*: jeśli h_n jest nierosnącym ciągiem funkcji schodkowych takich, że $h_n \searrow 0$, to $\int h_n \to 0$. Następnie pokazać, że dla $h_n \geqslant 0$ teza jest prawdziwa, jeśli zakładamy tylko, że $h_n \searrow 0$ prawie wszędzie.