Analiza matematyczna II.1

semestr zimowy 2019/2020

zadania na ćwiczenia, 17 I 2020

Michał Kotowski

Zadanie 1. Podać przykład, że suma nieprzeliczalnej rodziny zbiorów miary zero może nie być miary zero.

Zadanie 2. Niech $A_i \subseteq K = [0,1]^n$, $i = 1, 2, \ldots$, będą zbiorami pełnej miary (tj. takimi, że $K \setminus A_i$ jest miary zero). Udowodnić, że $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ również jest zbiorem pełnej miary. Podać przykład, że nie musi tak być, jeśli rozpatrujemy nieprzeliczalnie wiele zbiorów A_i.

Zadanie 3. Udowodnić, że zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ jest miary zero.

Zadanie 4. Udowodnić, że zbiór Cantora $C = \left\{ x \in [0,1] : x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}, a_i \in \{0,2\} \right\}$ jest miary zero.

Zadanie 5. Wykazać, że następujące zbiory są miary zero:

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \in \mathbb{Q}\}$

(b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in \mathbb{Q}\}$

(c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$, gdzie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą

Zadanie 6. Wykazać, że jeżeli co najmniej jeden ze zbiorów $A, B \subseteq \mathbb{R}$ jest miary zero, to $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ również jest miary zero.