Analiza matematyczna II.1

semestr zimowy 2019/2020

zadania na ćwiczenia, 11 X 2019

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wykazać, że dla $p \in [1, \infty]$ normą dualną do $\|\cdot\|_p$ jest norma $\|\cdot\|_q$, gdzie p, q spełniają $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (dla $p = 1$ przyjmujemy $q = \infty$ i vice versa).

Zadanie 2. Dla operatora liniowego $A : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|')$ jego normę definiujemy jako $\|A\| := \sup\limits_{v \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Av\|'}{\|v\|}$.

(a) Wykazać, że powyższy wzór rzeczywiście definiuje normę na przestrzeni odwzorowań liniowych z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^m$.

(b) Rozpatrzmy operator zadany wzorem $A(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$. Obliczyć normę $\|A\|$ jako operatora z $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_r)$ w $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_s)$, gdzie $r, s \in \{1, 2, \infty\}$.

Zadanie 3. Niech $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ oznacza przestrzeń wszystkich przekształceń liniowych z $\mathbb{R}^k$ w $\mathbb{R}^n$, $k \leqslant n$. Rozstrzygnąć, czy zbiór przekształceń o maksymalnym rzędzie jest domknięty/otwarty.