Analiza matematyczna II.1

semestr zimowy 2019/2020

zadania na ćwiczenia, 10 i 14 I 2020

Michał Kotowski

Zadanie 1. Rozpatrzmy zbiór $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 6\}$ oraz funkcję $F : K \to \mathbb{R}$ daną wzorem $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$. Wyznaczyć kres dolny i górny funkcji F na zbiorze K.

Zadanie 2. Znaleźć na elipsie o równaniu $x^2 + 2y^2 = 1$ punkty, które są położone najbliżej i najdalej od prostej o równaniu $x + y = 2$.

Zadanie 3. Ustalmy $p, q > 1$ takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dla dowolnego $c > 0$ rozpatrzmy zbiór

$$L_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} = c\}$$

oraz funkcję $g(x, y) = xy$. Wyznaczyć kresy funkcji g na zbiorze L_c i udowodnić nierówność $xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

Zadanie 4. Rozpatrzmy funkcję $h : (0, 1)^n \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$h(x_1, \ldots, x_n) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i.$$

Wykazać, że h przedłuża się do funkcji ciągłej na $[0, 1]^n$, a następnie znaleźć kres górny h na zbiorze $K = \{(x_1, \ldots, x_n) \in [0, 1]^n : x_1 + \ldots + x_n = 1\}$.

Zadanie 5. Rozpatrzmy funkcję $f(x, y, z) = x + y$ oraz zbiór

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2 - 5)^2 + 16z^2 = 16\}.$$

Wyznaczyć minima i maksima lokalne funkcji f na zbiorze M.