Analiza matematyczna II.1

semestr zimowy 2019/2020

zadania na ćwiczenia, 20 XII 2019 i 7 I 2020

Michał Kotowski

Zadanie 1. Załóżmy, że $k \leqslant \min\{m, n\}$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest odwzorowaniem klasy C^1, a $M = F^{-1}(0)$. Wykazać, że jeśli dla każdego $x \in M$ mamy $\operatorname{rank} DF(x) = n - k$, to M jest k-wymiarową rozmaitością klasy C^1.

Zadanie 2. Niech $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^T A = I\}$ oznacza zbiór ortogonalnych macierzy $n \times n$. Wykazać, że $O(n)$, traktowany jako podzbiór $\mathbb{R}^{n^2}$, jest rozmaitością wymiaru $\frac{n(n-1)}{2}$.

Zadanie 3. Rozpatrzmy odwzorowanie $\phi : \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem

$$\phi(t) = (-\sin t \sin 2t, \cos t \sin 2t).$$

Wykazać, że ϕ jest odwzorowaniem gładkim oraz jego różniczka w każdym punkcie jest różnowartościowa, ale $\phi\left(\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ nie jest podrozmaitością $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 4. Rozpatrzmy funkcję $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daną wzorem $F(x, y) = x^3 + xy + y^3$. Dla każdej z poziomic F rozstrzygnąć, czy jest rozmaitością w $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 5. Niech Γ będzie krzywą gładką leżącą w półpłaszczyźnie $\{(r, z) : r > 0\}$. Wykazać, że powierzchnia obrotowa wyznaczona przez Γ, tj. zbiór

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) \in \Gamma\}$$

jest 2-wymiarową rozmaitością w $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 6. Dla $n \geqslant 3$ rozpatrzmy zbiór

$$M = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1, x_1 + \ldots + x_n = 0\}.$$

Wykazać, że M jest rozmaitością i wyznaczyć jej wymiar.