Analiza matematyczna II.1

semestr zimowy 2019/2020

zadania na ćwiczenia, 13 XII 2019

Michał Kotowski

Zadanie 1. Niech $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem klasy C^1. Załóżmy, że istnieje taka stała $M > 0$, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^n$ zachodzą nierówności

$$\frac{1}{M} \|x - y\| \leqslant \|F(x) - F(y)\| \leqslant M \|x - y\| .$$

Pokazać, że F jest dyfeomorfizmem oraz dla dowolnego $r > 0$ mamy

$$B\left(F(x), \frac{r}{M}\right) \subseteq F(B(x, r)) \subseteq B(F(x), Mr).$$

Zadanie 2. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$. Załóżmy, że $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest dyfeomorfizmem takim, ze $F(A) = B$. Pokazać, że wówczas

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \left(\|dF(x)\| + \left\|dF^{-1}(x)\right\| \right) = +\infty.$$

Zadanie 3. Niech $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach zespolonych. Korzystając z twierdzenia o funkcji uwikłanej zbadać, w jaki sposób pierwiastki P zależą od współczynników $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.