Analiza matematyczna II.1

semestr zimowy 2019/2020

zadania na ćwiczenia, 3 XII 2019

Michał Kotowski

Zadanie 1. Rozpatrzmy odwzorowanie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem $f(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$. Czy jest ono dyfeomorfizmem na swój obraz? Czy jest lokalnie odwracalne?

Zadanie 2. Rozpatrzmy odwzorowanie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem $f(x, y) = (x^2 + y - y^2, 2xy + y)$. Znaleźć wszystkie punkty, w których f jest lokalnie odwracalne. Wiedząc, że $(2, 1)$ jest jednym z nich, obliczyć różniczkę f^{-1} w punkcie $(4, 5)$.

Zadanie 3. Rozpatrzmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(t) = \begin{cases} t + 2t^2 \sin \frac{1}{t}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Pokazać, że f spełnia wszystkie założenia twierdzenia o funkcji odwrotnej poza ciągłością pochodnej i że f nie jest lokalnie odwracalna w otoczeniu 0.

Zadanie 4. Rozpatrzmy przekształcenie $\phi : (-2\pi, 1) \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem

$$\phi(t) = \begin{cases} (\cos t, \sin t), & t \in (-2\pi, 0) \\ (1, t), & t \in [0, 1). \end{cases}$$

Znaleźć obraz odcinka $(-2\pi, 1)$ przy tym przekształceniu i pokazać, że ma ono wszystkie własności z definicji dyfeomorfizmu poza ciągłością ϕ^{-1}.