Analiza matematyczna II.1

semestr zimowy 2019/2020

zadania na ćwiczenia, 26 i 29 XI 2019

Michał Kotowski

Zadanie 1. Znaleźć punkty krytyczne funkcji $f(x,y) = \frac{y}{x} + y - x^2$ i rozstrzygnąć, czy są one ekstremami lokalnymi.

Zadanie 2. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną, która w każdym punkcie spełnia równanie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

Wykazać, że jeśli $d^2 f$ jest niezdegenerowana w punkcie p, to f nie ma w tym punkcie ekstremum lokalnego.

Zadanie 3. Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest klasy $C^2(\mathbb{R}^2)$ oraz że zachodzi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - e^{x-y}}{x^2 + y^2} = 2.$$

Wyznaczyć $D_1 D_2 f(0,0)$.

Zadanie 4. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$. Dla każdego $p \in A$ opisz stożek styczny $T_p A$.

Zadanie 5. Znaleźć stożek styczny do zbioru A w punkcie $(0,0)$:

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(x^2 - 4y^2)(x - y^3) = 0\}$

(b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leqslant x^3\}$

Zadanie 6. Napisać równanie prostej stycznej w punkcie $p = (2, -3)$ do poziomicy funkcji $f(x,y) = x^4 + xy + y^2$.